

1111. D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2025). Premessa a: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (Eds.) (2025), *Variazioni sul tema: Semiotica. Contributi alla ricerca in Didattica della Matematica. Un omaggio a Raymond Duval*. Prefazione di R. Duval. Bologna: Bonomo

Premessa

Sul fondamentale contributo di Raymond Duval alla ricerca in Didattica della Matematica come disciplina scientifica

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Il nostro legame personale, come ricercatori e come amici, con RD è pluriennale e strettissimo. A parte l'averlo avuto come ospite in varie occasioni in Colombia e in Italia e averlo frequentato in convegni dappertutto, soprattutto in Europa e America meridionale, ed essere noi stati suoi ospiti in Francia in occasione di eventi vari, le occasioni di scambio di idee sono state molteplici e le discussioni personali sulle sue idee straordinariamente precise e profonde sono state per noi illuminanti.

L'abbiamo avuto ospite più volte, per esempio, in occasione del convegno che annualmente si organizza da 40 anni a Castel San Pietro Terme, vicino a Bologna, come oratore in grado di catturare l'attenzione del pubblico. Abbiamo accolto un numero notevole di suoi testi sulla rivista *La Matematica e la sua didattica*, con referee sorpresi dalla qualità delle sue argomentazioni. Nei convegni che abbiamo organizzato in Svizzera, la sua presenza è sempre stata oggetto di commenti entusiastici. E l'elenco potrebbe proseguire a lungo, ma vi torneremo con maggiori dettagli.

Ricordiamo le lunghe, intense e proficue discussioni sulle complicazioni in ambito didattico di eseguire, seguire, capire, interpretare, riconoscere le trasformazioni semiotiche di conversione, cioè quelle che permettono di passare da *una* rappresentazione semiotica di un oggetto matematico in *un dato* registro a un'*altra* rappresentazione semiotica dello stesso oggetto matematico ma in un *altro* registro. Secondo RD queste trasformazioni costituiscono una notevole difficoltà nella prassi didattica. Non è detto esplicitamente, ma sembra talvolta implicito in RD e diffusa parecchio nei suoi studi che, al contrario, la trasformazione di trattamento non crei particolari problemi, intendendo (com'è noto) per trattamento la trasformazione semiotica che permette di passare da una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico in un dato registro a un'*altra* rappresentazione semiotica dello stesso oggetto matematico ma nello stesso registro.

Questa questione ha fatto sì che noi stessi e parecchi ricercatori legati a noi abbiano fatto esperienze e prove in aula sulla conversione, ma non altrettanto sul trattamento. Spinti proprio da lui, anche noi abbiamo deciso di verificare quel che succedeva

davvero dal punto di vista didattico con il trattamento, giungendo a risultati che ci hanno sorpreso parecchio; non entreremo in dettagli qui, dato che non è questo lo scopo di questa premessa.

Fin dai primi anni 2000 abbiamo deciso di raccontare in convegni o riunioni di ricerca i risultati delle nostre esperienze, spesso in sua presenza. Per esempio lo fece MF a Rodi il 13 aprile 2007, durante la sua parte della nostra conferenza generale in comune (*How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects*) in occasione del 5th MEDCONF2007 (*Mediterranean Conference on Mathematics Education*), 13-15 aprile 2007, Rhodes, Greece. L'articolo fu poi pubblicato in quegli Atti l'anno dopo (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2008b), anche a seguito di uno studio precedente (D'Amore, Fandino Pinilla, 2008a).

Quando MF, quel giorno, enunciò i risultati di ricerca riscontrati, accompagnati da suoi commenti personali estemporanei, scoppiò il finimondo; intervenne con veemenza anche Athanasios Gagatsis in persona che è stato allievo in corsi di dottorato in Francia tenuti da RD. Seguì una bella discussione con toni accesi. Ma poi la sera, dopo cena, venne a farsi spiegare da MF i dettagli della nostra ricerca l'intero gruppone degli allievi dottorali di Gagatsis ...

Invitammo RD nel settembre del 2015 a un convegno internazionale in Colombia che Martha e io organizzammo a Santa Marta, nei Caraibi, per conto dell'università La Sabana di Chía, un mega convegno di altissimo livello e in una situazione abitativa da favola: ogni relatore aveva un suo proprio elegantissimo e spazioso bungalow, sulla spiaggia, a contatto diretto con quel mare, il Caribe, che tutti citano, ma che ben pochi conoscono ... Invitammo per l'occasione come relatori cari e stimati amici, come Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Raymond Duval, Vicenç Font, Athanassios Gagatsis, Juan Diaz Godino e Salvador Llinares, tanto per dare un'idea del livello (Atti del Convegno: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2015). (Tenne una conferenza anche Guy Brousseau, ma non in presenza).

Viviamo ancora con immenso piacere la reazione entusiastica di RD in quella occasione.

C'è da ricordare che RD non ha cominciato la sua straordinaria avventura scientifica nel nostro mondo con la semiotica, iniziò con lo studio della dimostrazione; e poi passò all'analisi didattica dell'infinito. Nel 1996, a Siviglia, l'ICMI aveva nominato BD *Chief Organizer* del *Topic Group 14: Infinite processes throughout the curriculum*, all'VIII ICME, 14-21 luglio 1996; la scelta del nome era ovviamente stata passata al setaccio dalla comunità internazionale, ma soprattutto crediamo fosse stata suggerita da Luis Rico. Di questo evento, in relazione a Duval, diremo ancora maggiormente poi.

E poi va ricordata la collana di mini volumetti bilingui *Bologna-Querétaro. Collana di libri per la ricerca in didattica della matematica* a cura di Angel Balderas e BD. Gli editori erano: Pitagora, di Bologna, e Gruppo Editorial Ibero America, di México DF. Tali minilibri, di dimensione 16×11 cm, erano sostanzialmente la riproposta di articoli di importanti studiosi da noi scelti, pubblicati in varie lingue, che noi

stessi traducevamo in italiano e in spagnolo. In italiano vennero pubblicati, fra il 1998 e il 2001, ben 10 testi di vari autori. Il primo volume? Ovviamente:

1. Raymond Duval. *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?* (Duval, 1998).

E poi, così via, abbiamo a lungo approfittato delle idee finissime e diffuse internazionalmente di RD, facendo, con amici - colleghi - ex allievi un'analisi comparativa complessa fra diverse teorie e le posizioni di Duval (per esempio: Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Santi, Sbaragli, 2020).

Ripetiamo dunque che RD si è occupato di vari aspetti della ricerca connessa con la Didattica della Matematica; già dagli anni '80, studiando il problema della relazione fra argomentazione e dimostrazione, uno dei baluardi delle problematiche relative alla Didattica della Matematica, anche dal punto di vista concreto in aula. Studiammo avidamente questi suoi lavori e ne facemmo una presentazione-analisi poi in vari libri; ricordiamo soprattutto *Elementi* (D'Amore, 1999) e *Le basi* (D'Amore, 2003) entrambi pluritradotti e con prefazioni di studiosi illustri.

Come abbiamo già anticipato, RD si occupò, dopo del binomio: argomentazione-dimostrazione, della didattica dell'infinito mettendo in evidenza una dicotomia fra l'uso dei verbi *essere* e *avere*, che ci parve eccellente, di squisita sottigliezza e assai significativa. Su questa ci basammo per spiegare le insuperabili difficoltà che mostrano gli studenti alla fine del liceo e anche nei primi anni di università per capire la dimostrazione del famoso teorema di Cantor che asserisce che si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi dei punti di due varietà di diversa dimensione, per esempio i punti interni di un quadrato e i punti interni di un segmento (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; una versione più divulgativa di questo genere di studi si trova in: Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011, 2020). [Sugli aspetti storici, non didattici, della questione, si veda: D'Amore, Sbaragli (2020)].

Dunque, nel 1993 apparve uno dei primi lavori di RD sulla semiotica, forse il primo, che leggemmo subito e che ci sconvolse da tutti i punti di vista (Duval, 1993).

Con quell'articolo e altri degli anni successivi, RD conquistò il mondo e su quel tema ancora lavora oggi e prosegue dettando legge.

Una vera bomba culturale fu il suo libro (pluritradotto) del 1995 (Duval, 1995). (Una nota divertente: durante quel convegno di Santa Marta, nei Caraibi, ricordato in precedenza, quando, nella sua conferenza generale MIFP citò quell'articolo del 1993, RD dichiarò a gran voce, interrompendola in pubblico, che non se lo ricordava più e ringraziò M per averglielo ricordato ...).

Ora, nel 1995, accadde che, proprio il giorno del proprio compleanno, 28 settembre, BD fu invitato a un ICMI Study: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21-st Century*, a Catania. I due direttori (e poi curatori degli Atti) erano Carmelo Mammana e Vinicio Villani (ex presidente dell'UMI) entrambi cari amici che più volte BD aveva invitato a Castel San Pietro Terme a tenere conferenze plenarie. Ebbene, a sorpresa, proprio al momento dell'inaugurazione, Vinicio invitò BD a parlare per primo di una certa ricerca condotta con ragazzi di III media in Italia su un tema di geometria solida avente a che fare con la misura del volume delle piramidi,

che doveva apparire da lì a poco in un articolo pubblicato insieme a tre studenti (Cassani et al., 1996). Come tale ricerca fosse già a conoscenza di Vinicio, prima della sua pubblicazione, nel settembre 1995, mai si saprà, Abbiamo sempre ipotizzato che Vinicio fosse uno dei referee che lo aveva giudicato e accettato per la pubblicazione che avvenne infatti pochi mesi dopo.

Fra i presenti a Catania quella mattina dell'inaugurazione c'era RD, e BD non lo sapeva! La riunione durò 5 giorni e furono tutti tutti trascorsi con lui, a discutere, a passeggiare per Catania, a pranzo e a cena, a entrare in dettagli semiotici. BD rimase colpito dell'enorme competenza psicologica e didattica, oltre che filosofica, di RD. Fu solo allora che seppe che egli era, appunto, uno psicologo (come i cari amici Efraim Fischbein e Gérard Vergnaud), il terzo psicologo incontrato nel suo percorso scientifico. (È interessante ricordare che un collega tedesco con il quale BD lavorò e pubblicò a lungo, Hermann Maier, era matematico sì, ma con un phd in Psicologia) (D'Amore, Maier, 1999, 2002).

BD tornò a Bologna sconvolto dall'aver conosciuto RD, questo gigante così colto, così sensibile, così disponibile, così umano. Pochi giorni dopo venne a sapere, primi di ottobre del 1995, che l'ICME aveva scelto proprio lui come *chief organizer* del *Topic Group 14: Infinite processes throughout the curriculum*, in occasione dell'VIII ICME, Sevilla, 14-21 luglio 1996; e che uno dei due *advisory panel* era proprio RD. Dunque, si realizzò meno di un anno dopo un'altra ghiotta occasione di trascorrere una settimana di nuovo insieme a Siviglia, quando però RD oramai non si occupava più di infinito, ma solo di semiotica (in realtà, entrambi ...).

Per l'occasione e per la preparazione dell'evento di Siviglia, BD pubblicò molto sul tema e RD fu impressionato soprattutto da una sua ricerca comparativa con dettagliata analisi bibliografica relativa alle ricerche internazionali sull'infinito che, partendo dalle origini, arrivava al 1996 (D'Amore, 1996).

Da allora in poi il vincolo fu stretto e notevolmente profondo; e così continua; si videro e frequentarono in mille occasioni, in tanti convegni o riunioni di studio: CSPT (a partire dal 1996), Locarno, Bellinzona, Grecia, Cipro, Francia, Spagna, spesso in diverse città della Colombia; e tutti li notavano come una coppia fissa. BD invitò RD e passare alcuni giorni presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, dettando alcune conferenze di ricerca. Spesso RD viaggiava/viaggia con la moglie Anna, cara amica anche lei, matematica, analista, dell'Università di Lille, la quale asserisce in tono serio che le cose che fa Raymond sono tutte sciocchezze ... Tipico atteggiamento dei matematici di qualche decennio fa nei confronti della ricerca in Didattica ...

BD ancora non aveva un titolo di PhD in Didattica della Matematica; e così decisero insieme che avrebbe preso il titolo di PhD in *Didactique des Mathématiques* nell'Université du Littoral Côte d'Opal, Dunkerque, presso la quale RD era docente (e ora ne è professore emerito), avendo lui come direttore. E fu così che BD cominciò a frequentare Lille, città di residenza di RD, per studiare sotto la sua direzione e discutere con lui i tratti salienti della futura tesi. BD imparava più cose in quei 2-3 giorni di convivenza che in qualsiasi lungo studio sui libri e sulle riviste

a casa. Una mattina RD decise chissà perché che BD doveva capire in maniera profonda e significativa la vera differenza fra le posizioni di Jean Piaget e Lev Vygotskij; furono 16-17 ore entusiasmanti, dalla mattina alla sera di uno stesso giorno, durante il quale RD declamava tutto a memoria, interrotto solo da un rapido boccone verso le 13. BD ama dichiarare di aver capito tutto in quelle ore, più che nei mesi di studio da solo a casa su pile di testi ...

Siccome gli orari di lavoro usuali di RD andavano dalle 06 alle 24, BD non accettò mai le gentilissime offerte di una camera nell'ampia ed elegante casa con giardino nel centro di Lille, che RD e Anne gli offrivano, preferendo stare in un vicino hotel al quale RD lo accompagnava verso le 23 e dal quale lo prelevava alle 8, orari a lungo dibattuti tra loro (la proposta di BD era stata 09- 22, subito scartata da RD ...).

Dichiara BD di disporre di mille episodi umanamente interessanti da raccontare, da poterne trarre un romanzo; ma si limita ogni tanto a narrarne qualcuno in situazioni amene (e, qualche volta, a fine convegni, ma sempre in presenza di RD, il quale ne ride a crepapelle).

L'amato e stimato direttore della tesi, RD, cambiava il tema della tesi ogni volta che i due si incontravano; BD portava con sé da Bologna a Lille con orgoglio fogli su fogli scritti; e RD, dopo averli letti e sempre positivamente commentati, diceva che non valeva la pena proseguire su quel tema, tanto oramai BD lo avevo già capito e affrontato, e dunque suggeriva qualcosa di nuovo ... E ogni volta si trattava effettivamente di temi di straordinario interesse. Ma il tempo passava e BD voleva arrivare in fondo, avendo deciso di acquisire davvero quel titolo, anche dal punto di vista accademico. (Dichiara BD di non aver imparato da RD su questo atteggiamento da direttore di ricerca: afferma di non aver mai cambiato il contenuto di ricerca dottorale di un suo dottorando, in tutti questi anni come direttore, in vari paesi del mondo. Una volta scelto all'inizio un tema, lo si porta fino in fondo ...). Fino al giorno in cui BD comunicò a RD che si sarebbe presentato a sostenere l'esame all'Università di Nitra, in Slovacchia, dove avevano accettato (previo esame preliminare) contemporaneamente la candidatura sia di Martha che sua, con due direttori slovacchi bravi e ... concreti. RD accolse questa decisione di tutto cuore, consapevole che se BD non avesse compiuto questo passo, mai sarebbe arrivato in fondo con lui. La tesi di BD di forte sapore semiotico duvaliano piacque molto a RD; quel che RD non sapeva era che BD aveva smesso di pagare le tasse a Dunkerque già da tempo ... Ancora oggi, però, BD considera RD come suo direttore di tesi e RD mai lo ha negato, né in pubblico né in privato.

Ricordiamo con particolare piacere ancora un convegno in Colombia, a Ibagué, un anno dopo quello di Santa Marta; corsi, seminari, traduzioni improvvisate, tribunali di tesi più volte con RD a Bogotá, suoi seminari dottorali.

Vogliamo anche dire che nei due convegni internazionali che sono stati dedicati a BD a Bologna nell'ottobre del 2006 e nell'ottobre del 2011 (insieme a vari altri in Argentina, Brasile e Colombia), RD si presentò, entrambe le volte, con Anne, sempre a sue spese; e in entrambe le volte chiese e ovviamente ottenne di poter non

solo tenere una conferenza generale, ma che fosse però la prima, presentando ogni volta temi di grandissimo interesse (Duval, 2011, 2016).

Quando l'Universidad Distrital di Bogotá pubblicò un libro in spagnolo che raccoglie molti articoli di RD (e molti di Adalira Saenz Ludlow) sulla semiotica, gli editors scelsero BD per scrivere la prefazione generale e per presentare e commentare i suoi testi (Duval, Saenz Ludlow, 2016) (il commento degli articoli di Saenz Ludlow è invece di Carlos Vasco).

Con Adalira abbiamo avuto, sempre a Bogotá, varie occasioni di incontro e di chiacchiere, anche nella sua casa di Tocancipá, dove una volta RD alloggiò, invece del solito hotel a Bogotá.

In un numero speciale della rivista *Relime*, del quale furono *editors* Luis Radford e BD, entrambi scelsero gli autori da invitare, in qualche caso discutendo un po'; ma nemmeno un istante fu necessario per scegliere come uno degli autori ovvii RD, che è stato maestro di entrambi; ma su questa straordinaria avventura diremo ancora nel testo di questo stesso libro (Radford, D'Amore, 2006).

RD scrisse in varie occasioni prefazioni a libri nostri (per esempio: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013).

RD è citato spessissimo, centinaia di volte, nei nostri lavori; ma ci sono anche studi che sono dedicati per intero alla sua ricerca, da lui molto apprezzati e nominati (per esempio: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2013).

In questo ultimo lungo articolo, per esempio, abbiamo ricostruito una sorta di storia filosofico-semiotica dei precedenti di uno dei temi internazionalmente più noti delle teorie di RD, il cosiddetto "paradosso di Duval", dall'antichità più remota fino ai giorni nostri.

RD citò questo lavoro nel convegno di Santa Marta lungo il corso della sua conferenza, confessando pubblicamente di aver molto apprezzato certi nostri collegamenti fra il suo lavoro e quelli di studiosi medievali, soprattutto di Agostino di Tagaste; il che, disse, lo aveva costretto a leggere (con molto entusiasmo) il *De Magistro*.

Inoltre, come abbiamo già ricordato, nella collana dei minilibri *Bologna- Quéretaro*, il volume numero 1 è suo.

Gli è sempre piaciuto pubblicare sulla rivista fondata nel 1987 e diretta fino al 2024 da BD, *La matematica e la sua didattica*, per cui ci sarebbe da ricordare un elenco piuttosto lungo di articoli di RD pubblicati su questa rivista, fra il 1996 e il 2019. Citiamo solo i 4 (ben 4!) che decidemmo di pubblicare nel corso del 1996 (Duval, 1996a, 1996b, 1996c, 1996d).

Il fatto è che volevamo far conoscere ai ricercatori e ai docenti italiani alcuni dei suoi lavori pre-semiotica. E poi ne citiamo uno assai più recente relativo ai temi che RD tratta ultimamente (Duval, 2018). Nel 2019 abbiamo anche pubblicato un articolo a quattro mani (D'Amore, Duval, 2019).

Nel 2017 uscì a stampa per i tipi di Springer un suo libro in inglese; con nostra grande emozione e orgoglio, chiese a BD la prefazione, pur avendo a sua disposizione tutto il mondo intellettuale (Duval, 2017).

Senza alcun dubbio RD è uno degli amici più cari, ma anche uno dei nostri maestri più esigenti e profondi, di una generosità intellettuale senza limiti. Lo stesso vale nei suoi rapporti con entrambi, sempre ricco di attenzioni di una sensibilità scientifica e umana senza paragoni.

Altre formidabili attività comuni e narrazioni di vicende vissute insieme sono narrate in D'Amore (2021).

Testi citati

- Arrigo, G., D'Amore, B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494. [In versione inglese: "I see it but I don't believe it...". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Belgio). XXXVI, 1, 1999, 93-120. Un sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of the 2nd Mediteranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, 371-383; un altro sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. In versione spagnola: "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, Mexico DF, 11, 1, 1999, 5-24].
- Arrigo, G., D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, 16(1), 4-57.
- Arrigo, G., D'Amore, B., Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson. [Arrigo, G., D'Amore, B., Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico. Storia, epistemologica e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora. Nuova edizione: (2024)]

- Bologna: Bonomo]. [Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Magisterio].
- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Fúneme Mateus, C.C., Iori, M., Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bologna: Bonomo.
- [Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Fúneme Mateus, C.C., Iori, M., Santi, G. (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Bogotá: Magisterio].
- Cassani, A., Deleonardi, C., D'Amore, B., Girotti, G. (1996). Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della piramide. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B, 3, 249-260. [Questo articolo è stato ripubblicato in lingua inglese in: A. Gagatsis L. Rogers (Eds) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 95 G 2011/11. Thessaloniki. 73-82. Questo articolo è stato ripubblicato in lingua spagnola: *Números*. 1999, 38, 21- 31].
- D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. Un fertile campo per la ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 10(3), 322-335. [Questo testo è stato ripubblicato in lingua spagnola: *El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas*. *Epsilon*, 36, 1996, 341-360].
- D'Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora. Nuova edizione. (2024) Bologna: Bonomo). [D'Amore, B. (2024). *Memorias de una vida. Los personajes, las historias, las ideas*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Primo Premio Assoluto "Lo Stilo d'Oro", sezione Didattica, X Edizione del Premio Nazionale di Pedagogia Pescara. Il libro è stato recensito su *ZDM* 2001 vol. 33(4), 103-108 (H. Maier)]. Ristampa: (2024) Bologna: Bonomo. [D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prólogos de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico Romero. Bogotá: Editorial Magisterio]. [D'Amore B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefazioni di Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. (D'Amore, B. (2025). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la ,Didáctica de la Matemática*, Prólogo de Guy Brousseau. Prólogo y epílogo de Ricardo Cantoral, Bogotá Magisterio].
- D'Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora. Nuova edizione: (2024) Bologna: Bonomo. [D'Amore, B. (2024). *Memorias de una vida. Los personajes, las historias, las ideas*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., Duval, R. (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? *La matematica e la sua didattica*, 27(1), 47-67.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2008a). Change of the meaning of mathematical

- objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. In: M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Atti del Convegno Omonimo, Roma 5-8 marzo 2008. WG 5. Pp. 304-305. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana. Collana Scienza e Filosofia.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2008b). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: how other disciplines can be useful to the analysis. In: A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Proceedings of Conference of five cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno. 13-14 september 2008. Pp. 13-22. Nicosia (Cyprus): University of Cyprus.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (Eds.) (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Prólogo de Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Actas del Congreso Internacional: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9- 11 septiembre 2015, organizado por Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla por la Universidad de La Sabana. Chia (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. Nuova dedizione: (2024) Bologna: Bonomo. [In versione spagnola (2013): *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford y de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio]. [In versione portoghese (2015): *Primeiros elementos de semiótica Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefácios de Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe y de Ubiratan D'Ambrosio. Sao Paulo: Editora Livraria da Física].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto “paradosso di Duval”. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(3), 207-236. [In versione spagnola (2015): Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177-212].
- D'Amore, B., Maier, H. (1999). Investigating teachers' work with pupils' textual eigenproductions. In: I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*. Ceerme 1, August 27-30. Vol. II. Pp. 261-268. Osnabrück (Germany): Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- D'Amore, B., Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, 16(2), 144-189.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 6(5), 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996a). L'ostacolo dello sdoppiamento degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 10(1), 4-32.
- Duval, R. (1996b). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? *La matematica e la sua didattica*, 10(2), 130-152.
- Duval, R. (1996c). Quale cognitivo per la Didattica della Matematica? *La matematica e la sua didattica*, 10(3), 250-269.
- Duval, R. (1996d). Struttura del ragionamento deduttivo e apprendimento della dimostrazione. *La matematica e la sua didattica*, 10(4), 370-393.
- Duval, R. (1998). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? Bologna: Pitagora.

- Duval, R. (2011). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire (orale) et rédiger des instructions (écrit). Histoire d'une séquence d'activités. 64-67. In: S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2011. Department of Mathematics, University of Bologna. Preface of Bruno D'Amore. Pp. 64-67. Bologna: Pitagora.
- Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.) (2016), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2016. Department of Mathematics, University of Bologna. Preface of Bruno D'Amore. Pp. 213-220. Bologna: Pitagora.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, 26(2), 211-245.
- Duval, R. Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los artículos de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L., D'Amore, B. (Eds.) (2006), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale (in lingue inglese, francese e spagnola) della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). Introduzione di Luis Radford, conclusione di Bruno D'Amore; articoli di: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R. M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M.R. Wilhelmi; A. Koukkoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; G.T. Bagni; F. Arzarello.

Altri testi, non citati

- Asenova, M. (2021). Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica. Bologna: Pitagora. Prefazione di Ferdinando Arzarello. [Nuova edizione: (2024) Bologna: Bonomo].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2007b). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87-92. Atti del Joint Meeting of UMI- SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Santi, G., Sbaragli, S. (2012). Some relations between semiotics and didactics of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 11(1-2), 35-57.
- D'Amore, B., Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prólogos de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia*. Vol. I. *Dalle origini al miracolo greco*. Prefazione di Umberto Bottazzini. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia*. Vol. II. *Dal tramonto greco al Medioevo*. Prefazione di Paolo Freguglia. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III. *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Prefazione di Luigi Pepe. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.
- Fandiño Pinilla, M.I. (2020a). A proposito di relazioni fra teorie: alcuni punti di accordo e altri di divergenza fra TAD, TS, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica*, 28(2), 159-197.
- Iori, M. (2014a). Matemática y semiótica en el aula: Un punto de vista necesario. In C.J. Mosquera Suárez (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate*. Pp. 27-44. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Iori, M. (2015a). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato di ricerca in Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica). Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo.
- Iori, M. (2015b). La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, 71, 59-91.
- Iori, M. (2021). La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica. Prefazione di Raymond Duval. [Nuova edizione: (2024) Bologna: Bonomo].
- Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 32(77), 285-311.
- Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: a comparison between semiotic perspectives. In M. Pytlak, T. Rowland E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME – 7). Pp. 2503-2512. Poland: University of Rzeszów.
- Santi, G. (2012). Oggetti matematici, rappresentazioni semiotiche e significato: il problema dei cambi di senso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35A-B(3), 328-348.
- Santi, G. (2021). *Changes of meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives*. Prefazione di L. Radford. Bologna: Pitagora. [Nuova edizione: (2024). Bologna: Bonomo].